集中講義

「表現論特選」

「代数解析学特論（修）」

「多様体論特殊講義ＤＩ（博）」

岩木　耕平　講師

（名古屋大学 助教）

＊　期間：

６月　６日（火）～　６月　９日（金）

＊　時間：

１５：００～１８：００

＊　講義題目：「完全WKB解析入門」

＊　内容：完全WKB解析による複素領域上で定義された常微分方程式（Schrödinger 方程式や Painlevé 方程式など）へのアプローチを解説する。また、完全WKB解析とクラスター代数との関係、Gaiotto-Moore-Neitzke のスペクトルネットワークや Eynard-Orantin の位相的漸化式との関連などについても（時間が許せば）解説したい。

＊　談話会：　６月　５日（月）１６：００～

「完全WKB解析とその周辺」

＊　場所：　川井ホール

参考文献

河合・竹井 特異摂動の代数解析学 1998 岩波

予定

1. WKB解
2. Borel総和法とStokesグラフ

6/6 (今日)

3. Voros接続公式 (+モノドロミーの計算例) ← 6/7 (明日)
4. クラスター代数との関係 6/8
5. その他 (位相的漸化式 → Painlevé方程式) ← 6/9 未定

1. WKB解

(E) $$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x)\right)\psi = 0$$

$\hbar$: 小さなパラメーター

$Q(x)$: 有理函数

Riemann面上の設定まで一般化できるが、簡単のためこの設定でやる。

WKB(形式)解の構成

$\psi = \exp\left(\int^x P(x',\hbar)\,dx'\right)$ とすると,

$P = P(x,\hbar)$ は Riccati 方程式 $\hbar^2\left(\dfrac{dP}{dx} + P^2\right) = Q(x)$ をみたす.

$P = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \hbar^{n-1} P_n(x) = \frac{1}{\hbar}P_0(x) + P_1(x) + \hbar P_2(x) + \cdots$ を代入すると,

$$\hbar^2 P^2 = P_0^2 + \hbar\cdot 2P_0P_1 + \hbar^2(2P_0P_2 + P_1^2) + \cdots$$

$$\hbar^2 \frac{dP}{dx} = \hbar\frac{dP_0}{dx} + \hbar^2\frac{dP_1}{dx} + \cdots$$

これより, 次の漸化式が得られる:

$$P_0^2 = Q(x), \quad \therefore \quad P_0 = P_0^{(\pm)} = \pm\sqrt{Q(x)}$$

$$2P_0P_1 + \frac{dP_0}{dx} = 0, \quad \therefore \quad P_1^{(\pm)} = -\frac{1}{2P_0^{(\pm)}}\frac{dP_0^{(\pm)}}{dx} = -\frac{1}{4}\frac{Q'(x)}{Q(x)}$$

$$2P_0^{(\pm)}P_{n+1}^{(\pm)} + \sum_{\substack{n_1+n_2=n+1 \\ n_i\geq 1}} P_{n_1}^{(\pm)}P_{n_2}^{(\pm)} + \frac{dP_n^{(\pm)}}{dx} = 0 \quad (n\geq 1)$$

このようにして, Riccati 方程式の2つの解が得られる:

$$P_\pm(x,\hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^{n-1} P_n^{(\pm)}(x).$$

注 $P_\pm(x,\hbar)$ の各係数は　　スペクトル曲線と呼ぶ.

$\sqrt{Q(x)}$ の Riemann 面 $\Sigma = \{(x,y) \mid y^2 = Q(x)\}$ 上の函数とみなされる.

$\int^x P(x',\hbar)\,dx'$ の積分路は Σ 上の経路にとる必要がある.

以上は $\hbar$ に関する形式 Laurent 級数解.

レポート問題 1

① Airy方程式 $\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - x\right)\psi = 0$ $(Q(x) = x)$ の場合に

$P_\pm(x,\hbar)$ の展開の最初の5項を求めよ。

② $P_j^{(\pm)}(x) = a_j^{(\pm)} \cdot x^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}j}$，$a_j^{(\pm)} \in \mathbb{Q}$ と書けることを示し，

さらに，ある定数 $C, r > 0$ が存在して，

$$|a_j^{(\pm)}| \leq C r^j j!$$ が成立することを示せ。

(注) $j!$ が出て来るので通常の意味では収束しない，形式解！ □

質問 $Q(x) = x^2$ のときは？

回答 Hermite-Weber $Q(x) = x^2 - E$ の $E = 0$ の場合なので…

$Q(x) = x^2 - \hbar \frac{?}{4x^2}$ のようなケースで漸化式がちょんぎれるケース…

補題 (1) $P_n^{(\pm)}(x)$ は $Q(x)$ の零点（変わり点）と極を除いて正則になる。

（ただし，2価になる。Σ 上1価。）

(2) $P_{odd}(x,\hbar) := \frac{1}{2}\left(P_+(x,\hbar) - P_-(x,\hbar)\right)$，$P_{even}(x,\hbar) := \frac{1}{2}\left(P_+(x,\hbar) + P_-(x,\hbar)\right)$ とおく。

つまり，$P_\pm = P_{even} \pm P_{odd}$。このとき，

$$P_{even}(x,\hbar) = -\frac{1}{2}\frac{1}{P_{odd}(x,\hbar)}\frac{dP_{odd}(x,\hbar)}{dx}.$$

∵ $P_\pm = \pm P_{odd} + P_{even}$ を Riccati方程式に代入すると，

$$\hbar^2\left(\underbrace{\pm\frac{dP_{odd}}{dx}}_{} + \frac{dP_{even}}{dx} + P_{odd}^2 + P_{even}^2 \underbrace{\pm 2P_{odd}P_{even}}_{}\right) = Q(x)$$ ← この2つの等式の差をとる。

これらの和は0になる。

□

（(注) n:odd $\Rightarrow P_n^{(+)} = P_n^{(-)}$，$n$:even $\Rightarrow P_n^{(+)} = -P_n^{(-)}$）

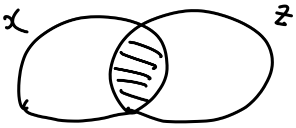
したがって，(E)の2つの形式解が得られる：

$$\psi_\pm(x,\hbar) = \exp\left(\int^x P_\pm(x',\hbar)\,dx'\right) = \exp\left(\pm\int^x P_{odd}(x',\hbar)\,dx' - \frac{1}{2}\log P_{odd}(x,\hbar)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{P_{odd}(x,\hbar)}}\exp\left(\pm\int^x P_{odd}(x',\hbar)\,dx'\right).$$

以下，この形の形式解を WKB解 と呼ぶことにする．

$\boxed{\text{レポート問題2}}$ (座標変換性)



$x = x(z)$，正則な座標変換．

① $\tilde{\psi}(z,\hbar) := \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{2}}\psi(x(z),\hbar)$ は次の $(\tilde{E})$ をみたすことを示せ：

$$(\tilde{E}) \quad \left(\hbar^2\frac{d^2}{dz^2} - \tilde{Q}(z)\right)\tilde{\psi} = 0.$$

ここで，

$$\tilde{Q}(z) := \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 Q(x(z)) - \frac{\hbar^2}{2}\{x(z);z\},$$

$$\{x(z);z\} = \frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2, \quad \text{Schwarz微分} \quad \left({}' = \frac{d}{dz}\right).$$

② $\tilde{P}_\pm(z,\hbar)$ を $(\tilde{E})$ から定まる Riccati 方程式の形式解とする．このとき，次を示せ：

$$\tilde{P}_\pm(z,\hbar) = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)P_\pm(x(z),\hbar) - \frac{1}{2}[x(z);z], \quad [x(z);z] = \frac{x''(z)}{x'(z)}.$$

特に $\tilde{P}_{odd}(z,\hbar) = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)P_{odd}(z,\hbar)$ が成立する．P_{odd} は 1-form の変換性をみたす． □

話の順番がちょっとアレかもしれませんが，

WKB解は次のように書き直せる（形式級数の変形）：

$$\psi_\pm(x,\hbar) = \exp\left(\pm\frac{1}{\hbar}\int^x \sqrt{Q(x)}\,dx\right)\times\sum_{n=0}^{\infty}\hbar^{n+\frac{1}{2}}\,\psi_n^{(\pm)}(x)$$

∵

$$\exp\left(\int^x P_{odd}\,dx\right) = \exp\left(\frac{1}{\hbar}\int^x P_0\,dx + \hbar\int^x P_2\,dx + \hbar^3\int^x P_4\,dx + \cdots\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{\hbar}\int^x P_0\,dx\right)\underbrace{\exp\left(\hbar\int^x P_2\,dx + \hbar^3\int^x P_4\,dx + \cdots\right)}_{\text{ここを}\hbar\text{について展開する}}$$

$P_0 = \pm\sqrt{Q(x)}$

$$= \exp\left(\frac{1}{\hbar}\int^x P_0\,dx\right)\left(1 + \hbar\int^x P_2\,dx + \frac{\hbar^2}{2}\left(\int^x P_2\,dx\right)^2 + \cdots\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{P_{odd}}} = \left(\frac{1}{\hbar}P_0 + \hbar P_2 + \hbar^3 P_4 + \cdots\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\hbar^{1/2}}{\sqrt{P_0}}\left(1 + \hbar^2\frac{P_2}{P_0} + \cdots\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad \square$$

ただし，WKBは一般に発散する：

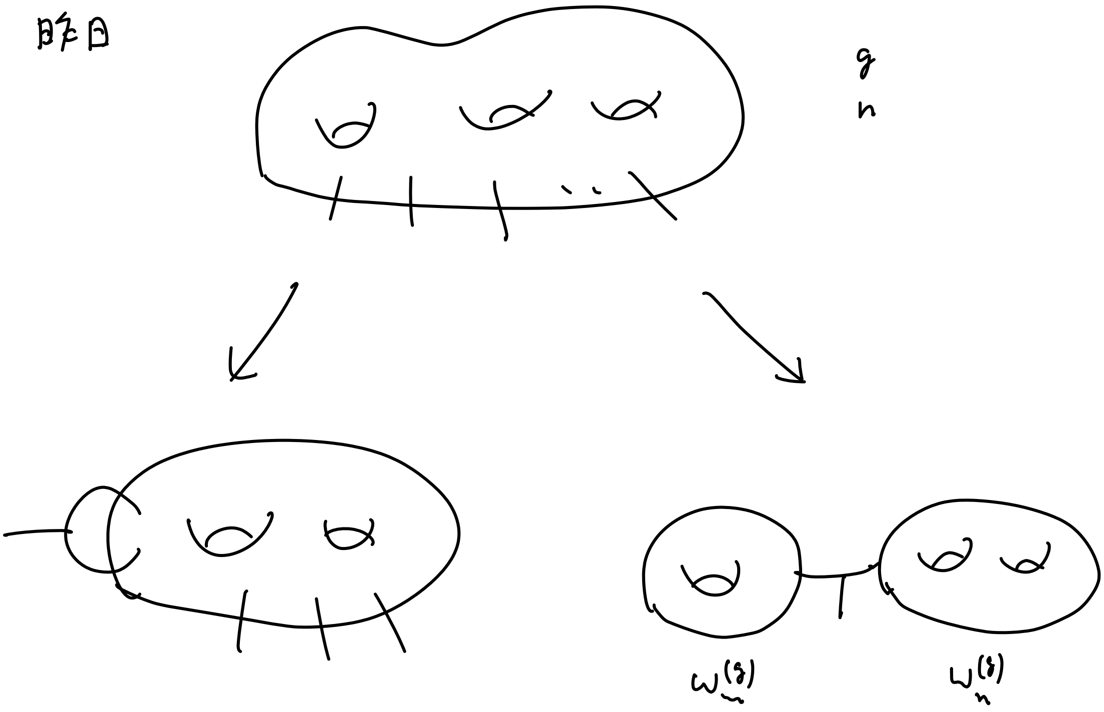
Airyの場合が
レポート問題

${}^\forall K$: compact, $\subset \mathbb{C}\setminus\{Q(x)$の零点と極$\}$, ${}^\exists C, r>0$ s.t.

$$\sup_{x\in K}\left|\psi_n^{(\pm)}(x)\right| \leqq C\,r^n\,n!$$ 程度の評価しか得られない。

そこでBorel総和法によって，$\psi_\pm$に"解析的実現"を与える。

$\boxed{\text{余談}}$ 昨日



2. Borel 総和法 と Stokesグラフ

E. Borelより前から使われていた

(Laplace変換) $\circ$ (項別の逆 Laplace 変換) $=$ (Borel 総和)

$f(\hbar) = \exp\left(\frac{\omega}{\hbar}\right)\sum_{n=0}^{\infty} f_n \hbar^{n+\alpha}$ ：指数項を持つ形式級数. $\alpha, \omega, f_n \in \mathbb{C}$.

クラスター代数をあつかうときに役に立つようにBorel和をmodifyする

定義 $\theta \in \mathbb{R}$ ("方向")を固定する

$f(\hbar)$ が θ 方向にBorel総和可能であるとは以下の条件が成立していることである:

(1) $f_B(y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\Gamma(n+\alpha)}(y+\omega)^{n+\alpha-1}$

は $y=-\omega$ の近傍で収束している.

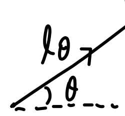
f_B を f の Borel変換と呼ぶ.

(本質的なのは以下の2つの条件)

Remark (Re $\alpha > 0$) ← (δ関数を含めれば $\alpha=0$ でOK)

$$e^{\frac{\omega}{\hbar}}\hbar^{n+\alpha} = \int_{l_\theta} e^{-\frac{y}{\hbar}} \frac{(y+\omega)^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)}\,dy$$

$$l_\theta = \mathbb{R}_{\geq 0}e^{i\theta} - \omega$$



(2) $f_B(y)$ が $l_\theta = \{-\omega + re^{i\theta} \mid r \geq 0\}$ を含むある領域 D に解析接続される.

(3) ある $C_1, C_2 > 0$ が存在して, D 上で

$$|f_B(y)| \leq C_1 e^{C_2|y|}.$$ ← Laplace積分が意味を持つ. □

f が θ 方向にBorel総和可能であるならば, $\exists \varepsilon > 0$ が存在して,

$$\mathcal{S}_\theta[f] := \int_{l_\theta} e^{-\frac{y}{\hbar}} f_B(y)\,dy$$

は $\Omega_\theta = \{\hbar \in \mathbb{C}^\times \mid |\arg\hbar - \theta| < \frac{\pi}{2},\ |\hbar| < \varepsilon\}$ 上で正則.

この $\mathcal{S}_\theta[f]$ を f の θ 方向の Borel sum と呼ぶ.

$\left\{\begin{array}{l}\text{θを変えるとBorel和がジャンプすることがある Stokes現象.}\\ \text{クラスター代数, かべごえ公式, …}\end{array}\right.$

f が θ 方向に Borel 総和可能ならば

$$\mathcal{S}_\theta[f](\hbar) \underset{\substack{\hbar\to 0\\ \hbar\in\Omega_\theta}}{\sim} f(\hbar) \quad : \text{漸近展開.}$$

すなわち, $^\forall N\ ^\exists\delta>0\ ^\exists C>0$ s.t.

$$\left|\frac{\mathcal{S}_\theta[f](\hbar)}{e^{\omega/\hbar}\cdot\hbar^\alpha} - \sum_{n=0}^{N} f_n\hbar^n\right| \le C|\hbar|^{N+1} \quad (\hbar\in\Omega_\theta,\ |\hbar|<\delta),$$

∵ Watson の補題. (c.f. 江沢 漸近解析 に書いてある.). □

一般論だけ書いても意味がないので, 昨日も紹介した例なんですけど,

$\boxed{例}$ $f(\hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^{-n}\hbar^{n+1}$ $(\omega=0,\ \alpha=1)$. $x\in\mathbb{C}^\times$ を固定、このとき,

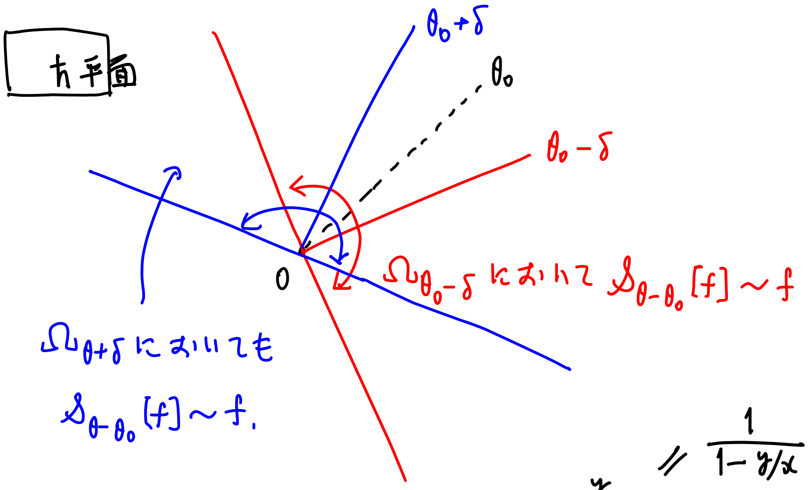
$$f_B(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cancel{n!}\,x^{-n}}{\cancel{\Gamma(1+n)}}y^n = \frac{1}{1-y/x}$$

, 収束. (条件(1)はOK)

$\arg x = \theta_0$ とおく. $f_B(y)$ は $\theta\neq\theta_0 \pmod{2\pi}$ のとき θ 方向に解析接続できて,

$y\to\infty$ で有界になる. (条件(2), (3)もOK!)

ゆえに, f は $\theta\ (\neq\theta_0)$ 方向に Borel 総和可能である.



$\Omega_{\theta_0-\delta}\cap\Omega_{\theta_0+\delta}$ において指数的に小さい.

$$\mathcal{S}_{\theta_0-\delta}[f]-\mathcal{S}_{\theta_0+\delta}[f] = \oint_{x} e^{-\frac{y}{\hbar}}\overbrace{f_B(y)}^{=\frac{1}{1-y/x}}dy = \overbrace{-2\pi i\, x\, e^{-\frac{x}{\hbar}}}.$$

同じ漸近展開を持つが, 解析関数として異なる. そのちがいも計算できる.

これは "Stokes 現象" と呼ばれている

Stokes 現象 $\longleftrightarrow$ Borel 変換が持つ特異性

(上の例では $\frac{1}{1-y/x}$ の $y=x$ での特異性)

発散級数だったからこそ，そのBorel変換は特異性を持ち，Stokes現象をひきおこす，

Borel変換の特異性にすべての解析が帰着していく．

(発散級数なおかげで Borel変換の収束半径が有限になる．)

$\rightsquigarrow$ Écalle の resurgence 理論 (Pham et al.)

超特異解析のかっこうの応用先!!!

Bernoulli 数

Weber 方程式から現われる

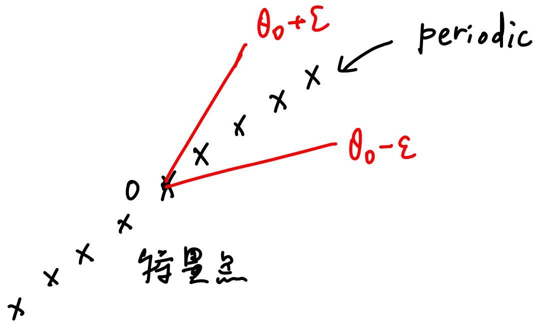
$\boxed{\text{レポート問題 3}}$

$$f(\hbar) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)} \left(\frac{\hbar}{\alpha}\right)^{2n-1} \quad \left(\alpha \in \mathbb{C},\ \frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{1}{2}t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} t^{2n}\right)$$ とおく．

① Borel 変換 $f_B(y)$ の特異点をすべて求めよ．(無限個現れる．) (periodic に現われる．)

② $f_B(y)$ の各特異点 ω に対して，Borel 和のずれ

$$\mathcal{S}_{\theta_0-\varepsilon}[f] - \mathcal{S}_{\theta_0+\varepsilon}[f]$$ を計算せよ．($\theta_0 = \arg \omega$).



□

Stokesグラフ

(E) $\left(\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}-Q(x)\right)\psi=0$, (WKB解) $\psi_{WKB}=\frac{1}{\sqrt{P_{odd}}}\exp\left(\pm\int^x P_{odd}\,dx\right)$

方向 $\theta\in\mathbb{R}$ を固定しておく。

定義 • $Q(x)$ の零点または単純極を (E) の変わり点 (turning point) という。

ただし、$z=\frac{1}{x}$ と座標変換したとき、

ポテンシャル函数 $\tilde{Q}(z,\hbar)$ の主要項 $\tilde{Q}_0(z)=\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 Q(x(z))$ が

$z=0$ に零点または単純極を持つならば $x=\infty$ も (E) の変わり点と呼ぶことにする。

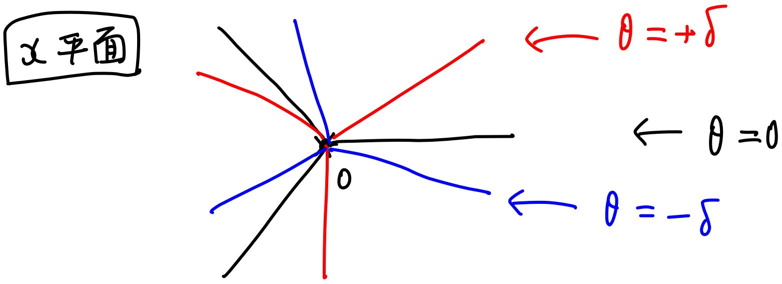
(一般の座標変換では Schwarz 微分に $\hbar^2$ がついているので主要項だけを見て定義すればよい。)

• v を変わり点とするとき、

$$\mathrm{Im}\left(e^{-i\theta}\int_v^x\sqrt{Q(x')}\,dx'\right)=0$$

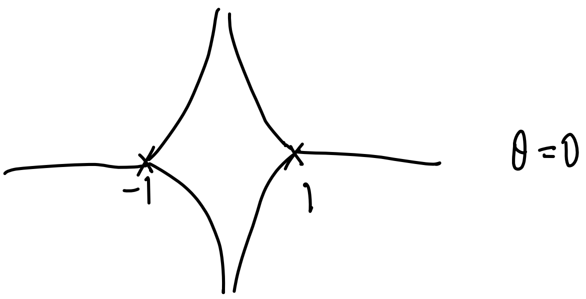
で定まる実1次元の曲線を θ 方向の Stokes曲線という。 □

例 $Q(x)=x$ (Airy) $\int_0^x\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$



θ を変えると Stokesグラフは回転する。 □

例 $Q(x)=x^2-1$



□

例 $Q(x)=\frac{1}{x}$, $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2x^{\frac{1}{2}}$

$\theta=0$

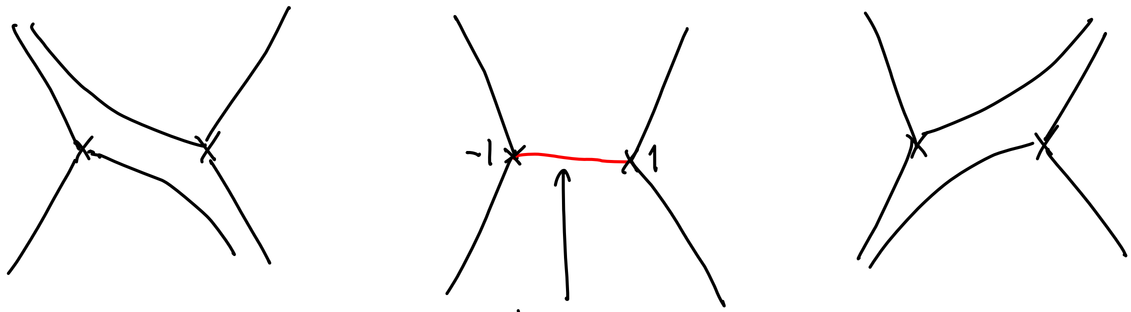
□

θ 方向の Stokes グラフとは
変わり点と θ 方向の Stokes 曲線がなすグラフ。

注 Stokes グラフは x 平面上で定義されている。
$\pm\sqrt{Q(x)}$ の符号は虚部が 0 という条件に関係しない。

例 $Q(x)=1-x^2$

$\theta=-\delta<0$　　$\theta=0$　　$\theta=+\delta>0$

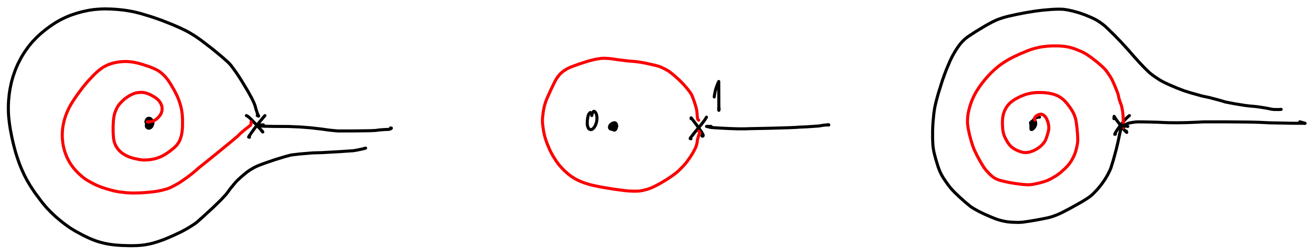


□

定義 変わり点どうしを結ぶ Stokes 曲線のことを Stokes segment と呼ぶ。 □

例 $Q(x)=\frac{x-1}{x^2}$ （$x=0$ は確定特異点）

$\theta=-\delta<0$　　$\theta=0$　　$\theta=+\delta>0$



定理 (Koike-Schäfke)

WKB解 $\psi_\pm = \dfrac{1}{\sqrt{P_{odd}}}\exp\left(\pm\int_{x_0}^{x} P_{odd}(x',\hbar)\,dx'\right)$ は

注

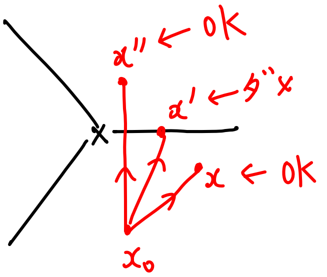
次の2条件がともにみたされるとき,
θ方向に($\hbar$の形式級数として) Borel総和可能.

$\pi : \Sigma \to \mathbb{P}^1$, projection とすると,

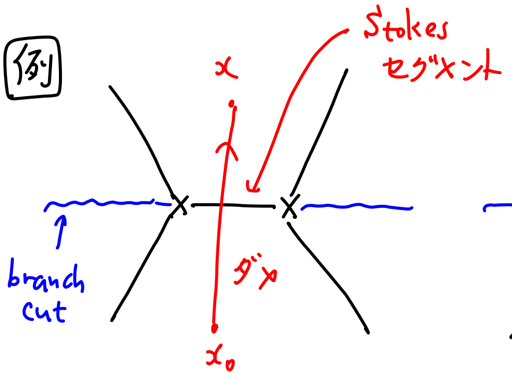
① $\pi(x_0)$, $\pi(x)$ は θ方向の Stokes グラフ上にない.

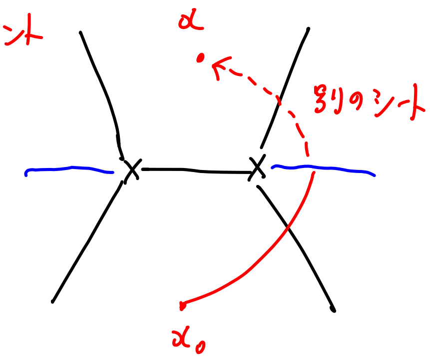
② x_0 から x までの積分路を連続変形して,
その π による像が θ方向の Stokes グラフの Stokes セグメントと交わらないようにできる. □

例



例

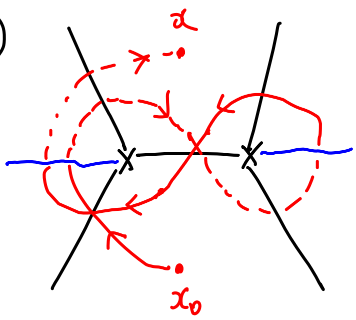




宿題

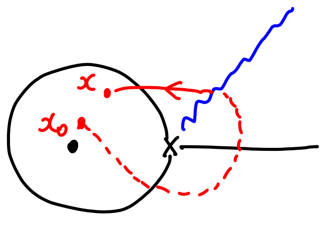
次の path での積分で定義された WKB解 は Borel総和可能か?

①



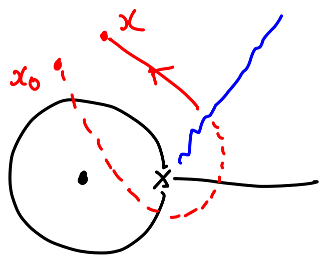
(答 OK)

②



(答 X)

③



(答 OK)

2d-4d 壁越え現象 □

明日は接続公式についてやる.